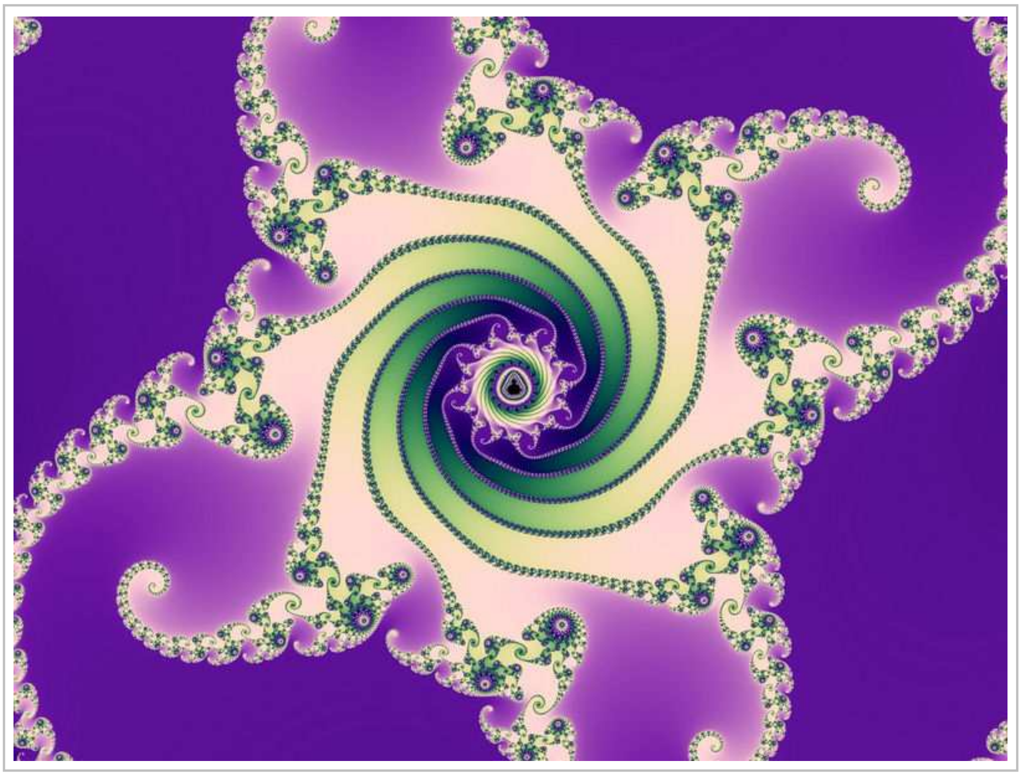
Testi d'esame 2001–2012



LORENZO ROI

Edizioni H–ALPHA

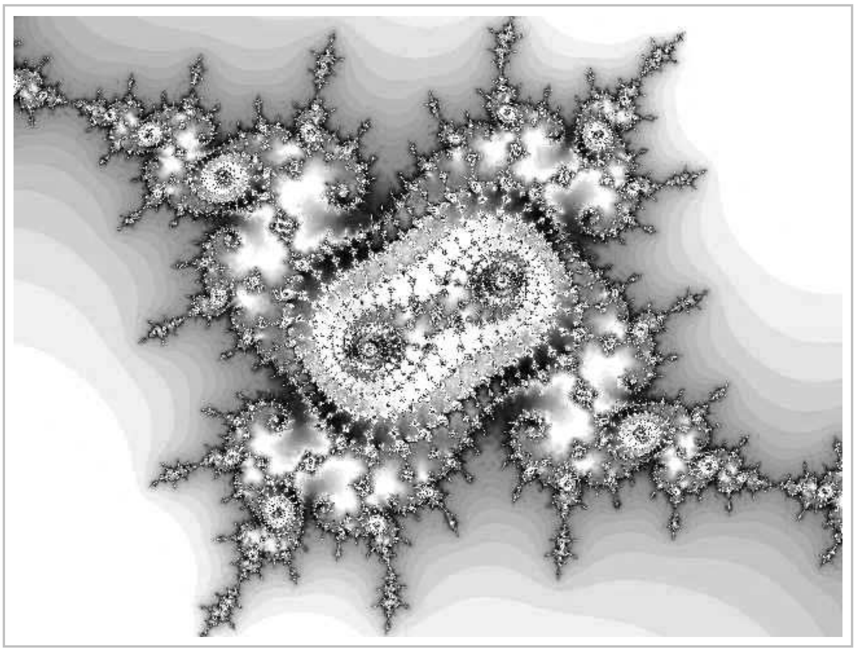
© Edizioni H–ALPHA. Novembre 2012.

L'immagine di copertina rappresenta un particolare dell'insieme di Mandelbrot.
Titolo: `Vortice frattale`.

Testi dei problemi e quesiti assegnati all'Esame di Stato di Liceo Scientifico di Ordinamento e P.N.I. anni 2001 – 2012

Raccolta di temi d'esame assegnati nelle varie sessioni ordinaria e suppletiva dal 2001 al 2012.

Lorenzo Roi



Insieme di Julia

INDICE

• ESAME 2001

1) Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione $x+y=4$.

c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate $(1,1)$ e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al punto precedente a), risulta tangente alla circonferenza k.

2) Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.

b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $\angle ABC$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13a$, $\overline{BC}=15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

Questionario

1) Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x)\to l$ per $x\to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a)=l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0)=2$. calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani $ACC'A'$ e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4) Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula: $V=(1/3)h(B+b+\sqrt{Bb})$. In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6) Dimostrare che si ha

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7) Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

a) area massima e perimetro massimo;
b) area massima e perimetro minimo;
c) area minima e perimetro massimo;
d) area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8) Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9) Il limite della funzione

$$\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x},$$

quando x tende a $+\infty$,

a) è uguale a 0;
b) è uguale ad 1;
c) è un valore diverso dai due precedenti;
d) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10) Si consideri la funzione

$$\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}.$$

Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

Ritorna all'indice

• ESAME 2001 suppletiva

1) Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m}$$

dove m è un parametro reale non nullo. *a)* Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione. *b)* Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2. *c)* Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

2) Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$ dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\overline{AB}/\overline{BC} = 3/5$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo γ tale che $\operatorname{sen}\gamma = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.
b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.
c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

Questionario

1) Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.
B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornirne un'esauriente giustificazione della risposta:

a) A vera – B vera; *b)* A vera – B falsa; *c)* A falsa – B vera; *d)* A falsa – B falsa.

2) Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD' in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3) Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576.$$

4) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5) Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6) Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7) Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a, b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

9) Calcolare la derivata della funzione $\operatorname{sen} 2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata.

10) Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:
a) necessaria e sufficiente;
b) necessaria ma non sufficiente;
c) sufficiente ma non necessaria.
Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornirne un'esauriente spiegazione della risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2001 PNI

1) Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y):

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che $PA/PB = k$ (k costante positiva) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di $45°$;

c) posto X, appartenente a γ, in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $\angle XAC$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = (XB/XA)^2$ e $x = \operatorname{tg}\alpha$.

2) Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y), è assegnata la funzione:

$$y = x^2 + a \log(x + b)$$

con a e b diversi da zero.

a) Si trovino i valori di a e b tali che la curva Γ grafico della funzione passi per l'origine degli assi e presenti un minimo assoluto in $x = 1$;

b) si studi e si disegni Γ;

c) si determini, applicando uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione della intersezione positiva di Γ con l'asse x;

d) si determini l'equazione della curva Γ' simmetrica di Γ rispetto alla retta $y = y(1)$;

e) si disegni, per i valori di a e b trovati, il grafico di:

$$y = |x^2 + a \log(x + b)|.$$

<u>Questionario</u>

1) Provare che una sfera è equivalente ai $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

2) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione: $xe^x + xe^{-x} - 2 = 0$.

3) Dimostrare che se $p(x)$ è un polinomio, allora tra due qualsiasi radici distinte di $p(x)$ c'è una radice di $p'(x)$.

4) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arcsen} x + \arccos x.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

5) Calcolare l'integrale

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx.$$

6) Con uno dei metodi di quadratura studiati, si calcoli un'approssimazione dell'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx$$

e si confronti il risultato ottenuto con il valore esatto dell'integrale.

7) Verificato che l'equazione $x - e^{-x} = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 0 e 1 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8) Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso: quale è la probabilità che essi siano tutti maschi?

9) Spiegare il significato di *sistema assiomatico* con particolare riferimento alla sistemazione logica della geometria.

10) Dire, formalizzando la questione e utilizzando il teorema *del valor medio* o di *Lagrange*, se è vero che: «se un automobilista compie un viaggio senza soste in cui la *velocità media* è di 60 km/h, allora almeno una volta durante il viaggio il tachimetro dell'automobile deve indicare esattamente 60 km/h».

Ritorna all'indice

• ESAME 2001 PNI suppletiva

1) Le misure a, b, c dei lati di un triangolo ABC sono in progressione aritmetica di ragione k.

a) Si esprima, in funzione di k, il raggio della circonferenza inscritta nel triangolo;
b) si stabilisca il valore di k per il quale r è massimo;
c) si fissi nel piano del triangolo un conveniente sistema di assi cartesiani, ortogonali e monometrici, e, per il valore di k determinato in b), si scrivano le coordinate dei vertici del triangolo ABC nonché le equazioni delle circonferenze, inscritta e circoscritta, a ABC;
d) si calcoli il rapporto tra i volumi delle due sfere di cui le circonferenze, inscritta e circoscritta, sono sezioni diametrali.

2) Una industria commercializza un suo prodotto confezionandolo in lattine realizzate utilizzando fogli di una lamierina molto sottile. Ciascuna lattina, di assegnata capacità, ha la forma di un cilindro circolare retto. Trascurando lo spessore del materiale, il candidato determini:

a) le dimensioni della lattina per la quale occorre la minima quantità di materiale per realizzarla.

Successivamente, posto il volume della lattina pari a 2 decilitri, se ne esplicitino le misure delle dimensioni:

b) nel caso di cui al punto a);
c) nel caso in cui si voglia che il diametro della base sia la sezione aurea dell'altezza.

Questionario

1) Enunciare il teorema del *valor medio* o di *Lagrange* illustrandone il legame con il teorema di *Rolle* e le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

2) Calcolare la derivata della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}.$$

Quali conclusioni se ne possono trarre per la $f(x)$?

3) Dire quale è il dominio della funzione $f(x) = x^\pi - \pi^x$ e stabilire il segno della derivata prima e quello della derivata seconda di $f(x)$ nel punto $x = \pi$.

4) Calcolare, integrando per parti:

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

5) Spiegare, anche con esempi appropriati, il significato in matematica di *"concetto primitivo"* e di *"assioma"*.

6) Nell'insieme delle cifre 1, 2, 3,. . . , 9 se ne scelgono due a caso. La loro somma è pari: determinare la probabilità che entrambe le cifre siano dispari.

7) Verificato che l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$ ammette una sola radice reale compresa tra 2 e 3, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

8) Calcolare il rapporto tra la superficie totale di un cilindro equilatero e la superficie della sfera ad esso circoscritta.

9) Dire (motivando la risposta) se è possibile inscrivere in una semicirconferenza un triangolo che non sia rettangolo. Ovvero, con i versi di Dante:
... se nel mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse. (Paradiso, XIII, 101-102)

Ritorna all'indice

• ESAME 2002

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.
b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).
c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.
d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.
e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 0$.

2) Si considerino le lunghezze seguenti:

$$a + 2x, \qquad a - x, \qquad 2a - x, \tag{1}$$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.
a) Determinare per quali valori di x le lunghezze (1) si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.
b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze (1), ne esiste uno di area massima o minima.
c) Verificato che per $x = a/4$ le (1) rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.
d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c), in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

Questionario

1) Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2) Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $A'/A'' = 2$. Calcolare il valore del rapporto V'/V''.

3) Considerati i numeri reali a, b, c, d – comunque scelti – se $a > b$ e $c > d$ allora:

a) $a + d > b + c$;
b) $a - d > b - c$;
c) $ad > bc$;
d) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4) Si consideri la seguente proposizione: “La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica”. Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5) Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x+1}$$

sia un'identità.

6) Si consideri la funzione

$$f(x)=(2x-1)^7(4-2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$.

7) Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x)=\int_x^{x+1}\ln t\,dt,\quad \text{con}\quad x>0.$$

8) La funzione reale di variabile reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[1,3]$ e derivabile nell'intervallo aperto $(1,3)$. Si sa che $f(1)=1$ e inoltre $0\leqslant f'(x)\leqslant 2$ per ogni x dell'intervallo $(1,3)$. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1\leqslant f(3)\leqslant 5$.

9) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

a) un punto;
b) due punti;
c) infiniti punti;
d) nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10) La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx=a,\qquad \int_0^6 f(x)\,dx=b,$$

dove a e b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx=\ln 2\qquad \text{e}\qquad \int_1^3 f(2x)\,dx=\ln 4.$$

Ritorna all'indice

• ESAME 2002 suppletiva

1) Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente ed x come resto.

a) Determinare $f(x)$.

b) Studiare la funzione

$$y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

e disegnarne il grafico G in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1},$$

calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{f(x)}{x^2 - 1}.$$

2) Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo ABCD, è tale che:

– il trapezio di base è circoscritto ad un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;
– lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;
– la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° col piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio ABCD.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base ABCD della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

Questionario

1) Si consideri la seguente equazione in x, y: $2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$, dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

a) è una circonferenza per ogni valore di k;

b) è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$;

c) è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$;

d) non è una circonferenza qualunque sia k.

Una sola risposta è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2) Considerata la funzione di variabile reale: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente ad 1 e giustificare la risposta.

3) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ per $x = -2$ e $x = 1$ ed $f(1) = -2$. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è

continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

4) Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} 2x, & \text{per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \dfrac{1+a}{\operatorname{sen} x}, & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x = 0$.

5) Un titolo in borsa ha perso ieri l'$x\%$ del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'$y\%$, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

6) Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a, b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7) Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x+4}$ è:

$$\text{a)}\quad \ln\frac{x}{x+2};\quad \text{b)}\quad \ln\frac{x+2}{x};\quad \text{c)}\quad \ln\sqrt{x^2+2x};\quad \text{d)}\quad \ln\sqrt{2x^2+x}$$

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8) S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che $a_n = S_n/(2n^2)$, è: a) è costante, b) crescente, c) decrescente. Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9) Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10) Di due rette a, b – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?
b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?
c) Le rette a, b sono comunque parallele?
d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2002 PNI

1) Due numeri x e y hanno somma e quoziente uguali ad un numero reale a non nullo. Riferito il piano ad un sistema S di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche (x, y):

1. si interpreti e discuta il problema graficamente al variare di a;
2. si trovi l'equazione cartesiana del luogo γ dei punti $P(x, y)$ che soddisfano al problema;
3. si rappresentino in S sia la curva γ che la curva γ' simmetrica di γ rispetto alla bisettrice del I e del III quadrante;
4. si determini l'area della regione finita di piano del primo quadrante delimitata da γ e da γ' e se ne dia un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati;
5. si calcoli y nel caso che x sia uguale a 1 e si colga la particolarità del risultato.

2) I raggi $OA = OB = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto. Si chiede di determinare:

1) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C';
2) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C';
3) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C, specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

<u>Questionario</u>

1) Se a e b sono numeri positivi assegnati quale è la loro media aritmetica? Quale la media geometrica? Quale delle due è più grande? E perché? Come si generalizzano tali medie se i numeri assegnati sono n?

2) Il seguente è uno dei celebri problemi del *Cavaliere di Méré (1610–1685)*, amico di *Blaise Pascal*: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"

3) Assumendo che i risultati – X, 1, 2 – delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.

4) Calcolare
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}.$$

5) Cosa si intende per "*funzione periodica*"? Quale è il *periodo* di $f(x) = -\operatorname{sen}\frac{\pi x}{3}$? Quale quello di $\operatorname{sen} 2x$?

6) Utilizzando il teorema di Rolle, si verifichi che il polinomio $x^n + px + q$ $(p,\ q \in \mathbb{R})$, se n è pari ha al più due radici reali, se n è dispari ha al più tre radici reali.

7) Data la funzione
$$f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 3x$$
calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0 < \alpha < 1$ in cui la funzione si annulla.

8) Verificare che la funzione $3x + \log x$ è strettamente crescente. Detta g la funzione inversa, calcolare $g'(3)$.

9) Trovare $f(4)$ sapendo che $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos \pi x$.

10) Spiegare, con esempi appropriati, la differenza tra *omotetia* e *similitudine* nel piano.

Ritorna all'indice

• ESAME 2002 PNI suppletiva

1) Nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali monometriche (x, y) è assegnata la funzione:

$$y = \frac{a + b \ln x}{x}$$

ove $\ln x$ denota il logaritmo naturale di x e a e b sono numeri reali non nulli.

a) Si trovino i valori di a e b per i quali il grafico G della funzione passa per i punti $(e^{-1}, 0)$ e $(e^2, 3e^{-2})$.
b) si studi e si disegni G;
c) si determini l'equazione della curva G' simmetrica di G rispetto alla retta $y = y(1)$;
d) si determini, con uno dei metodi numerici studiati, un'approssimazione dell'area delimitata, per $1 \leqslant x \leqslant 2$, da G e da G';
e) si disegnino, per i valori di a e b trovati, i grafici di:

$$y = \frac{a + b \ln |x|}{|x|} \qquad y = \left| \frac{a + b \ln x}{x} \right| .$$

2) È data la sfera S di centro O e raggio r. Determinare:

a) il cono C di volume minimo circoscritto a S;
b) il cono C' di volume massimo inscritto in S;
c) un'approssimazione in litri della capacità complessiva di C e C', posto $r = 1$ metro;
d) la misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare sviluppo della superficie laterale del cono C;
e) la misura approssimata, in gradi sessagesimali, dell'angolo di semiapertura del cono C applicando uno dei metodi numerici studiati.

Questionario

1) Da un'urna contenente 90 palline numerate se ne estraggono quattro senza reimbussolamento. Supponendo che l'ordine in cui i numeri vengono estratti sia irrilevante, come è nel gioco dell'Enalotto, si calcoli la probabilità che esca la quaterna (7, 47, 67, 87).

2) Calcolare la probabilità che in dieci lanci di una moneta non truccata dal quinto lancio in poi esca sempre testa.

3) Calcolare la derivata rispetto a x della funzione

$$\int_x^a f(t) dt$$

ove $f(x)$ è una funzione continua.

4) Calcolare: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3 dt}{x^4}$.

5) Utilizzando il teorema di Rolle provare che tra due radici reali di $e^x \operatorname{sen} x = 1$ c'è almeno una radice reale di $e^x \cos x = -1$.

6) Applicando il teorema di Lagrange all'intervallo di estremi 1 e x, provare che:

$$1 - \frac{1}{x} < \log x < x - 1$$

e dare del risultato un'interpretazione grafica.

7) Verificare che la funzione

$$y = \frac{1 - e^{1-x}}{1 + e^{1-x}}$$

è invertibile e detta g la funzione inversa, calcolare $g'(0)$.

8) Con uno dei metodi di quadratura studiati si valuti l'integrale definito

$$\int_1^3 \frac{\log x}{x}\, dx$$

con un errore inferiore a 10^{-4}.

9) Verificato che l'equazione $\cos x - \log x = 0$ ammette una sola radice positiva compresa tra 1 e 2 se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

10) Chiarire, con esempi appropriati, la differenza in matematica tra *"concetto primitivo"* e *"assioma"*.

Ritorna all'indice

• ESAME 2002 PNI straordinaria

1) Considerato il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + ay + abz = a \\ bx + a^2y + a^2bz = a^2b \end{cases} \tag{1}$$

stabilire sotto quali condizioni per i parametri reali a, b esso è:
- determinato,
- indeterminato,
- impossibile.

Posto che la terna (x, y, z) sia una soluzione del sistema (1), studiare la curva di equazione

$$y - \frac{b}{a(a-b)} = \frac{x}{a} + z$$

e disegnarne l'andamento in un riferimento cartesiano ortogonale (Oab).

2) Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a) studiare le funzioni

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3} \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3} \qquad \text{e disegnare i loro grafici.}$$

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R e S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R e S;

d) calcolare il volume del solido generato dalla regione finita di piano delimitata dalle due curve quando ruota di un giro completo intorno all'asse x.

Questionario

1) In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t ad essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo $MNN'M'$, fornendo una esauriente dimostrazione.

2) Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

3) In un riferimento monometrico di assi cartesiani (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a ed $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

4) Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x \to 0-} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = -1, \qquad \lim_{x \to 0+} \left(x + \frac{x}{|x|} \right) = 1.$$

5) Considerata la funzione $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x-2}$, stabilire se è continua e derivabile nel punto $x = 2$ e fornire un'interpretazione geometrica delle conclusioni.

6) Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

7) Un'urna contiene 100 palline numerate da 1 a 100. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina, essa sia contrassegnata da un numero:
- divisibile per 10 o per 8,
- divisibile per 10 e per 8,
- non divisibile per 10 né per 8.

8) Con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare le coordinate del baricentro del triangolo in cui l'omotetia di centro $(1, 2)$ e caratteristica $\frac{1}{4}$ trasforma il triangolo di vertici $(4, 0)$, $(-4, 4)$, $(0, 8)$.

9) Tra le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy \end{cases}$$

assegnate in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare quella che trasforma i punti di coordinate $(3, \sqrt{2})$ e $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ ordinatamente nei punti di coordinate $\left(\frac{1}{3}, \frac{7\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$.

10) Scrivere un algoritmo che risolva il problema di determinare una radice approssimata di un'equazione con un'approssimazione voluta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2003

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

1) Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2.

2) È assegnata la funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}, \quad \text{dove } m \text{ è un parametro reale.}$$

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$.

Questionario

1) Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: ≪Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe≫. Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2) Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3) Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza AB. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza PB, è tuttavia possibile misurare la distanza AP. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza AB.

4) Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A) $-1 < x \leqslant 3$; B) $-1 \leqslant x < 3$; C) $0 < x \leqslant 3$; D) $0 \leqslant x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5) La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6) La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7) Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots, n-1,\ n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

8) x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:
A) è divisibile per 2 e per 3;
B) è divisibile per 2 ma non per 3;
C) è divisibile per 3 ma non per 2;
D) non è divisibile né per 2 né per 3.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9) Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

10) Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2003 suppletiva

1) Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$$\overline{AB} = 3 \text{ cm} \quad \overline{AC} = 2 \text{ cm} \quad C\widehat{A}B = 60°.$$

Si tracci la bisettrice di $C\widehat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

1) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.
2) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.
3) Si trovi sul lato AD, internamente ad esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.
4) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

2) È data una piramide retta a base quadrata.

1) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b $(a > b)$ e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.
2) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}$ dm^2.
3) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.
4) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

Questionario

1) Tra i rettangoli aventi la stessa area di 16 m^2 trovare quello di perimetro minimo.

2) Cosa si intende per "funzione periodica"? Quale è il periodo della funzione

$$f(x) = \operatorname{sen} x - 2\cos x?$$

3) Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.

4) Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

5) Dare una giustificazione delle formule

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

e utilizzarle per provare che:

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

6) Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

7) Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

8) Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che:

$$f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2 \quad \text{e} \quad f'(0) = 0.$$

Quale è $f(x)$?

9) Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.

10) Definire gli asintoti – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e fornire un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Ritorna all'indice

• ESAME 2003 PNI

1) Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proporzioni:

$$OD : DB = OA : DP$$
$$OC : DP = DP : BC$$

   ove D è la proiezione ortogonale di B su OA;
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$;
3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

2) Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;
2. $f(0) = 2$;
3. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2\log 2}$.

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G.
Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.
Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G.
Si calcoli $\displaystyle\int \frac{1}{g(x)}\,dx$.
Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r.

Questionario

1) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?

2) Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

3) Quale è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?

4) Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y = 2$ quattro volte.

5) Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da *Michel Rolle*, matematico francese, (1652-1719)], che se l'equazione

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:

$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 = 0.$$

6) Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Quale è un possibile valore di b?

7) Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

8) Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3\,dx$.

9) Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\operatorname{sen} x$ e che $f'(0) = 1$. Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

10) Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Ritorna all'indice

• ESAME 2003 PNI suppletiva

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le parabole di equazione:

$$y = (a-1)x^2 - 2ax + a^2,$$

dove a è un parametro reale diverso da 1.

a) Determinare quali tra esse hanno punti in comune con l'asse x e quali no.
b) Trovare le due parabole che hanno il vertice in un punto di ascissa a.
c) Stabilire se le due parabole trovate sono congruenti o no, fornendo un'esauriente spiegazione della risposta.
d) Scrivere l'equazione del luogo geometrico L dei vertici delle parabole assegnate e disegnarne l'andamento dopo averne determinato in particolare asintoti, estremi e flessi.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva L e dalla retta di equazione $y = \frac{3}{2}$.

2) In un trapezio rettangolo $ABCD$, circoscritto ad un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a) Calcolare le misure del lati del trapezio.
b) Riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.
c) Tra le centro–affinità di equazioni:

$$x' = ax + by, \qquad y' = cx + dy,$$

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.

d) Stabilire se la centro–affinità trovata presenta rette unite.
e) Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro–affinità trovata sopra.

Questionario

1) Nota la lunghezza di una corda di un cerchio di dato raggio, calcolare quella della corda sottesa dall'angolo al centro uguale alla metà di quello che sottende la corda data.
[Nota – La risoluzione del problema è stata usata da Tolomeo, II sec. d.C., per la costruzione di una tavola trigonometrica in maniera equivalente alla nostra formula di bisezione del seno.]

2) Nello spazio ordinario sono dati due piani α, β ed una retta r. Si sa che r è parallela ad α e perpendicolare a β. Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di α e β? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3) Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 2x}}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A) $x \leqslant 0$ e/o $x > 2$; B) $x \leqslant 0$ e/o $x \geqslant 2$; C) $x = 0$ e/o $x > 2$; D) $x = 0$ e/o $x \geqslant 2$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Si consideri un polinomio di grado $n \geqslant 2$ nella variabile reale x con coefficienti reali. Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché esso ammetta due zeri uguali al

numero reale α è che il valore del polinomio e quello della sua derivata prima si annullino per $x = \alpha$.

5) Stabilire se esistono i limiti della funzione $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ per:

$$\text{a)}\quad x \to +\infty; \qquad \text{b)}\quad x \to -\infty; \qquad \text{c)}\quad x \to 0,$$

e, in caso di risposta affermativa, determinarli.

6) Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

dove k è un parametro reale.
Dire se l'affermazione: ≪il sistema ammette la sola soluzione $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ per ogni valore di k diverso da 1≫ è vera o falsa e fornire una spiegazione esauriente della risposta.

7) Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la formula che fornisce l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse di semiassi noti.

8) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) sono date le affinità di equazioni:

$$x' = (a + 1)x - by + a, \qquad y' = (a - 1)x + 2by - 1,$$

dove a, b sono parametri reali.
Dimostrare che fra esse vi è una similitudine diretta e di questa trovare il punto unito.

9) Un'urna contiene 30 palline uguali in tutto e per tutto fuorché nel colore: infatti 18 sono bianche e 12 nere. Vengono estrarre a caso, una dopo l'altra, due palline. Qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca sapendo che la prima:
a) è bianca e viene rimessa nell'urna?
b) è bianca e non viene rimessa nell'urna?
c) è messa da parte senza guardarne il colore?

10) Considerata l'equazione in x:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove a, b, c sono numeri reali qualsiasi, con $a \neq 0$, scrivere un algoritmo che ne determini le soluzioni reali e le comunichi, esaminando tutti i casi possibili.

Ritorna all'indice

• ESAME 2004

1) Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$.
1. Disegnate il grafico G di f.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$;
4. determinare la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

2) ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.
1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ metri, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di K.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

Questionario

1) Trovate due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

2) Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3) Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

4) Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

5) Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che:

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

Trovate una espressione di $g(x)$.

6) Verificate che le due funzioni $f(x) = 3 \log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

7) Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e δ. Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo?

8) La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

9) Calcolate:

$$\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx.$$

10) Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Ritorna all'indice

• ESAME 2004 suppletiva

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}. \qquad [1]$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

2) Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo ϕ tale che $\cos\phi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.
a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrivibile in una circonferenza γ.
b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile ad una circonferenza?
c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.
d) Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ.

Questionario

1) La funzione $f(x) = \dfrac{3x - 2\operatorname{sen} x}{2x - 3\operatorname{sen} x}$ è per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$: a) non esiste, b) è $\frac{3}{2}$, c) è $\frac{2}{3}$, d) un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2) Determinare il più grande valore n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10000.

3) Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4) Risolvere la seguente disequazione in x, $(\ln x)^2 \geqslant \ln(x^2)$.

5) Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:
a) sempre maggiore di h,
b) sempre minore di h,
c) sempre uguale ad h,
d) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7) Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.

8) Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx$. È allora possibile calcolare:

$$[a]\quad \int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; \qquad [b]\quad \int_0^3 f(3x)\,dx; \qquad [c]\quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx; \qquad [d]\quad \int_0^1 f(3x)\,dx.$$

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(2x - \sqrt{4x-1}\right)$.

10) Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che $\operatorname{sen}\alpha = 3/5$ e $\operatorname{sen}\beta = 24/25$, ne esistono:

a) 0, b) 1, c) 2, d) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Ritorna all'indice

• ESAME 2004 PNI

1) Sia γ la curva d'equazione:

$$y = ke^{-\lambda x^2}$$

ove k e λ sono parametri positivi.

1. Si studi e si disegni γ;
2. si determini il rettangolo di area massima che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ;
3. sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ e assumendo $\lambda = \frac{1}{2}$, si trovi il valore da attribuire a k affinché l'area compresa tra γ e l'asse x sia 1;
4. per i valori di k e λ sopra attribuiti, γ è detta *curva standard degli errori* o *delle probabilità* o *normale di Gauss* (da *Karl Friedrich Gauss, 1777–1855*). Una *media* $\mu \neq 0$ e uno *scarto quadratico medio* $\sigma \neq 1$ come modificano l'equazione e il grafico?

2) Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{2b}x + x$$

con a e b numeri reali diversi da zero.

1. Si dimostri che, comunque scelti a e b, esiste sempre un valore di x tale che $f(x) = \frac{a+b}{2}$.
2. Si consideri la funzione g ottenuta dalla f ponendo $a = 2b = 2$. Si studi g e se ne tracci il grafico.
3. Si consideri per $x > 0$ il primo punto di massimo relativo e se ne fornisca una valutazione approssimata applicando un metodo iterativo a scelta.

Questionario

1) La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

2) Si provi che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3) Un solido viene trasformato mediante una similitudine di rapporto 3. Come varia il suo volume? Come varia l'area della sua superficie?

4) Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$ quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

5) Dare un esempio di funzione g, non costante, tale che:

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 2 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

6) Dare un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

7) Tra i triangoli di base assegnata e di ugual area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

8) Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

9) Si dimostri che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione e se ne calcoli un valore approssimativo utilizzando un metodo iterativo a scelta.

10) Nel piano è data la seguente trasformazione:

$$x \to x\sqrt{3} - y$$
$$y \to x + y\sqrt{3}.$$

Di quale trasformazione si tratta?

Ritorna all'indice

• ESAME 2004 PNI suppletiva

1) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x}. \qquad [1]$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
e) Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

2) Nel Liceo Scientifico "Torricelli" vi sono 4 classi quinte, i cui alunni sono distribuiti per sezione e per sesso in base alla seguente tabella:

sezione sesso	A	B	C	D
M	12	10	13	8
F	16	18	15	10

a) Rappresentare graficamente la situazione per mezzo di un istogramma.
b) Calcolare le distribuzioni marginali degli studenti per sezione e per sesso.
c) Calcolare la probabilità che, scelta a caso una coppia di studenti della 5 A, questa sia formata da alunni di sesso:
   1) maschile, 2) femminile, differente.
   Quanto vale la somma delle tre probabilità trovate?
d) Calcolare la probabilità che, scelti a caso una classe e, in essa, una coppia di studenti, questa sia formata da alunni di sesso differente.
e) Scelto a caso un alunno di quinta del Liceo in questione e constatato che si tratta di uno studente di sesso maschile, calcolare la probabilità che esso provenga dalla 5 D.

Questionario

1) La funzione $f(x) = \dfrac{3x - 2\operatorname{sen} x}{2x - 3\operatorname{sen} x}$ è per $x \to +\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x \to +\infty$: a) non esiste, b) è $\frac{3}{2}$, c) è $\frac{2}{3}$, d) un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2) Determinare il più grande valore n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10000.

3) Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4) Risolvere la seguente disequazione in x, $(\ln x)^2 \geqslant \ln(x^2)$.

5) Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x+y+z$ risulta:

a) sempre maggiore di h,
b) sempre minore di h,
c) sempre uguale ad h,
d) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6) Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7) Descrivere tutte le isometrie dirette che mutano un tetraedro regolare in sé.

8) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = \frac{1}{2}bx - 2. \end{cases}$$

Tra di esse determinare quella che trasforma il punto $(1,0)$ nel punto $(1,-1)$ e stabilire se ammette rette unite.

9) Due giocatori, A e B, giocano a "Testa o Croce" con una moneta le cui facce hanno la stessa probabilità di uscire. Ciascuno di loro punta la somma S. Chi vince porta via l'intera posta. Il gioco si svolge con la seguente regola: ≪Il giocatore A lancia la moneta: se esce "Testa" vince, altrimenti il gioco passa a B. Questi, a sua volta, lancia la moneta e vince se viene "Croce", in caso contrario il gioco ritorna ad A, che ripete il lancio e vince se viene "Testa". In caso contrario il gioco ripassa a B, che vince se viene "Croce". Se B non vince il gioco ha termine e ciascuno dei due riprende la somma che aveva puntato≫. Il gioco è equo?

10) Dopo aver spiegato perché la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x - \cos x}$ è positiva nell'intervallo $[1,2]$, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato dell'area situata sotto il grafico della funzione relativamente all'intervallo considerato.

Ritorna all'indice

• ESAME 2005

1) Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

2) Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0, +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, nell'intervallo $[0, +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

<u>Questionario</u>

1) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\operatorname{sen} 18°$ e $\operatorname{sen} 36°$.

2) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

3) Si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\operatorname{sen} x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\operatorname{sen} x = -1$.

4) Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

5) Il numero e di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x?

6) Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

7) Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

8) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

9) Si calcoli senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di

$$\operatorname{sen}^2(35^\circ) + \operatorname{sen}^2(55^\circ)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

10) Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Ritorna all'indice

• ESAME 2005 Suppletiva

1) Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.
A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.
B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4. calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC ed MNP;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

2) È assegnata la funzione
$$f_a(x) = \frac{a}{1+x^2},$$
dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Dopo aver controllato che il valore $\overline{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\overline{\gamma}$ e $\overline{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$.

Questionario

1) È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle base del trapezio.

2) Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

3) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che
$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad k \text{ intero qualsiasi;}$$
Gianna trova la seguente soluzione:
$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \text{ intero qualsiasi.}$$

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4) Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)x^2-(2k-1)x+(k+1)=0$ dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' ed x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x'+x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

5) Il limite della funzione $(1-x)^{1/x}$ per $x \to 0$:
- [A] è uguale ad 1;
- [B] è uguale a $+\infty$;
- [C] non esiste;
- [D] è uguale ad e;
- [E] è uguale ad $\frac{1}{e}$, essendo "e" la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6) Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche: $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f''(1)<0$.

7) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x+my=1$ e $mx-2y=2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

8) È vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2-4)$ e $\ln(x+2)+\ln(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

9) Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7,b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

10) Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

Ritorna all'indice

• ESAME 2005 PNI

1) Nel piano Oxy sono date le curve λ e r d'equazioni:

$$\lambda : x^2 = 4(x - y) \quad \text{e} \quad r : 4y = x + 6.$$

1. Si provi che λ e r non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto $P \in \lambda$ che ha distanza minima da r.
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.
4. Si determini il valore di c per il quale la retta $y = c$ divide a metà l'area della regione S del I quadrante compresa tra λ e l'asse x.
5. Si determini il volume del solido di base S le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse x sono quadrati.

2) Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0, +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è continua e derivabile in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, nell'intervallo $[0, +\infty[$, un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \frac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

Questionario

1) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $\operatorname{sen} 18^\circ$ e $\operatorname{sen} 36^\circ$.

2) Si dia una definizione di retta tangente. Successivamente, si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\operatorname{sen} x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\operatorname{sen} x = -1$.

3) Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ la cui composizione $\sigma \circ \phi$ dia luogo alla traslazione di equazione:

$$\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5}. \end{cases}$$

Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso $\phi \circ \sigma$.

4) Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

5) Come si definisce e quale è l'importanza del numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]? Si illustri una procedura che consenta di calcolarlo con la precisione voluta.

6) Le rette r e s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in una omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ.

7) Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

8) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = e^t + 2$ e $y = e^{-t} + 3$ nel suo punto di coordinate $(3, 4)$.

9) Quale è la probabilità di ottenere 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

10) Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2005 PNI suppletiva

1) Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.
A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.
B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4. dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

2) È assegnata la funzione

$$f_a(x) = \frac{a}{1+x^2},$$

dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

Questionario

1) È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi. Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle base del trapezio.

2) Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

3) Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{oppure} \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad k \text{ intero qualsiasi;}$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \text{ intero qualsiasi.}$$

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4) Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)x^2-(2k-1)x+(k+1)=0$ dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' ed x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x'+x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

5) Il limite della funzione $(1-x)^{1/x}$ per $x \to 0$:

[A] è uguale ad 1;
[B] è uguale a $+\infty$;
[C] non esiste;
[D] è uguale ad e;
[E] è uguale ad $\frac{1}{e}$, essendo "e" la base dei logaritmi naturali.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6) Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni x di un dato intervallo J, allora $f(x)$ è costante in J.

7) Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a,b]$.

8) In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?

9) Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a \end{cases}$$

dove a è un parametro reale. Il sistema è:

[A] determinato per ogni valore di a;
[B] indeterminato per un valore di a ed impossibile per un valore di a;
[C] indeterminato per nessun valore di a, ma impossibile per un valore di a;
[D] impossibile per nessun valore di a, ma indeterminato per un valore di a.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

10) Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x'=2x+my-1, \qquad y'=mx-2y-2,$$

dove m è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

Ritorna all'indice

• ESAME 2006

1) Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarla per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

2) Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

<u>Questionario</u>

1) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2) I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3) Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

4) La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

5) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6) L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7) La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0, 1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

8) La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

9) Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10) La funzione $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Ritorna all'indice

• ESAME 2006 Suppletiva

1) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornire la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.
c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y ed area massima.
e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

2) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x+k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.
a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.
c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.
d) Determinare l'equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A ed avente il centro sull'asse y.
e) Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c.

Questionario

1) Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

2) Il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è:

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3) Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, per $x \to 0$:

[A] non esiste; [B] è 0; [C] è un valore finito diverso da 0; [D] e $+\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Trovare, col procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x) = \text{tg}(x)$.

5) Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

6) Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

7) Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$ allora $f(x) > M$.
È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

8) È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende ad ∞.

9) Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10) Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno ad un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia "1", posta a capotavola, è riservata al ragazzo "1", che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

Ritorna all'indice

• ESAME 2006 PNI

1) Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarla per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

2) Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa tra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette d'equazione $y = -1$ e $y = -2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

Questionario

1) Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2) I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3) In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

4) Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

5) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6) L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7) *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: "*che cos'è la probabilità?*" era solito rispondere: "*la probabilità non esiste!*". Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla ad una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

8) Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geqslant$ 0,99 di colpirlo almeno una volta?

9) Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Ritorna all'indice

• ESAME 2006 PNI Suppletiva

1) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente: $y = x^2$, $x = y^2 - 2y$.

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.
b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.
c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.
d) Le due parabole p' e p'' sono congruenti: farlo vedere, dimostrando che esiste almeno un'isometria che trasforma una di esse nell'altra e trovando le equazioni di tale isometria.
e) Stabilire se l'isometria trovata ammette elementi uniti.

2) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno ed un solo flesso.
b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta r di equazione $x + 27y - 9 = 0$.
c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto B che t ha in comune con γ.
d) Trovare l'equazione della circonferenza di diametro AB.
e) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva γ, dalla retta r e dall'asse x.

Questionario

1) Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

2) Il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0, 2\pi]$ è:

[A] 0; [B] 2; [C] 3; [D] 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3) Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, per $x \to 0$:

[A] non esiste; [B] è $+\infty$; [C] 0; [D] è un valore finito diverso da 0.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4) Dimostrare che la funzione $f(x) = x^a$, dove a è un qualsiasi numero reale non nullo, è derivabile in ogni punto del suo dominio.

5) Il seguente teorema esprime la condizione d'integrabilità di Mengoli–Cauchy:
Se una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$*, è ivi continua, allora ivi è anche integrabile.*
Enunciare la proposizione inversa e spiegare in maniera esauriente perché tale proposizione non è un teorema.

6) Dire se è corretto o no, affermare che si ha:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c$$

dove c è una costante arbitraria e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

7) Calcolare l'ampiezza dell'angolo formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al "primo".

8) Dimostrare che ogni similitudine trasforma una parabola in una parabola.

9) Un'urna contiene 150 palline, che possono essere di vetro o di plastica, bianche o nere. Per la precisione: 62 palline sono bianche, 38 sono di vetro nero e 40 sono di plastica bianca. Calcolare la probabilità che, estratta a caso una pallina, NON sia di plastica nera.

10) In ciascuna di tre buste uguali vi sono due cartoncini: in una busta essi sono bianchi, in un'altra sono neri, nella terza sono uno bianco e l'altro nero. Si estrae a caso una busta e, da essa, un cartoncino. Qual è la probabilità che il cartoncino rimasto in questa busta sia dello stesso colore di quello estratto?

Ritorna all'indice

• ESAME 2007

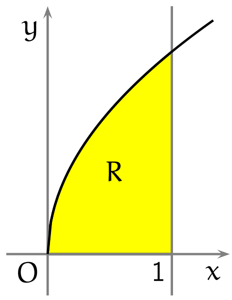
1) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\widehat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\widehat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\widehat{B}C = 36°$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2) Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

Questionario



1) La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

2) Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$.

4) Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

5) Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[-2, 2]$. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

6) Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

7) Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2, 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

8) Si risolva l'equazione: $4\dbinom{n}{4} = 15\dbinom{n-2}{3}$.

9) Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

10) Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Ritorna all'indice

• ESAME 2007 PNI

1) Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\int_0^t \frac{1}{f(x)}\,dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\frac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

2) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\widehat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\widehat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\widehat{B}C = 36°$ allora è $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Questionario

1) Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

2) La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leqslant x \leqslant e$, è base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

3) Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

4) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

5) Si consideri il teorema: ≪*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*≫ e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

6) Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

7) Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto $(1, 2)$.

8) A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: ≪Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima

partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare≫.

9) Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

10) Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Ritorna all'indice

• ESAME 2007 suppletiva

1) Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri il punto $A(2,0)$.

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:
$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$
controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

2) Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \log 3$.

<u>Questionario</u>

1) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$, quando x tende a 0.

2) Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$, nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

3) Si calcoli il valore medio della funzione $y = \operatorname{tg}^2 x$, nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

4) Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$, nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

5) Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

6) Si consideri la seguente proposizione: "Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

7) Sia data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$
Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

8) Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione $y = e^x$, dalla curva di equazione $y = x^3$ e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

9) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x + 2}$.

10) Si risolva la disequazione $\dbinom{x}{3} > \dfrac{15}{2}\dbinom{x}{2}$.

Ritorna all'indice

• ESAME 2007 PNI Suppletiva

1) Si consideri la funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dt$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa $\log 2$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x = \log 3$.
4. Tenuto conto che: $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$, si calcoli un valore approssimato di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

2) Rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto $A(2, 0)$.

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

Questionario

1) Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva $y = 2/x$ e dalla retta di equazione $y = -x + 3$.

2) Si calcoli il valore medio della funzione $y = \text{sen}^3 x$, nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

3) Data la funzione $y = x^3 + kx^2 - kx + 3$, nell'intervallo chiuso $[1, 2]$, si determini il valore di k per il quale sia ad essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

4) Si consideri la seguente proposizione: "In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati eguali è costante". Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

5) Si dimostri che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

6) Si scelga a caso un punto P all'interno del cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.

7) Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b è $S = \pi ab$.

8) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)}$, quando x tende a 0.

9) Si verifichi che la curva di equazione $y = x^3 + 3x^2 - 1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

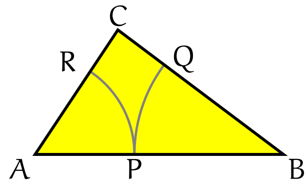
10) Si risolva la disequazione $5\dbinom{x}{3} \leqslant \dbinom{x+2}{3}$.

Ritorna all'indice

• ESAME 2008

1) Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\widehat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



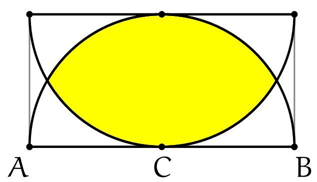
b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

2) Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$, si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\widehat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

<u>Questionario</u>

1) Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

2) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\operatorname{sen} \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3) Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

4) Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661–1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$.

5) Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{12}.$$

6) Se $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

7) Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

8) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9) Sia $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

10) Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare nel segnale?

Ritorna all'indice

• ESAME 2008 PNI

1) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1,0)$, $B(3,0)$ e C variabile sulla retta d'equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti $(1,2)$ e $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\widehat{C}B = \frac{\pi}{4}$.
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano delimitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che è $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$ si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

2) Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

1. Si traccino i grafici di f e di g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.
4. Si calcoli l'area racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo $[2,4]$.

Questionario

1) Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

2) Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea dal raggio, si provi che sen $\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3) Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

4) Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661–1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{2008}}{2^x} = 0$.

5) Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2 - x^3 > 0$.

6) I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

7) Perché è *geometria "non" euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

8) Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9) In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

10) Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Ritorna all'indice

• ESAME 2008 Suppletiva

1) Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.

1. Si esprima in funzione di $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (con $x = B\widehat{O}P$) l'area del quadrilatero $OMPN$, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.
2. Si studi la funzione $f(t)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

2) Si consideri la funzione: $y = \operatorname{sen} x(2\cos x + 1)$.

1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $P(\pi, 0)$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
3. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi$ e si determini il loro punto d'intersezione C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

Questionario

1) Si determini la distanza delle due rette parallele: $3x+y-3\sqrt{10} = 0$, $6x+2y+5\sqrt{10} = 0$.

2) Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.

3) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva: $f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

4) Si calcoli il limite della funzione:

$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x},$$

quando x tende a 0.

5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \log(x+\sqrt{1 + x^2})$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6) Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.

7) La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{x/2}(x+1)$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$ è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

8) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.

9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$$

nel punto P di ascissa $x = \frac{\pi}{2}$.

10) Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti $P(1 + t^2, 1 + t^2)$, ottenuto al variare di t nei reali.

Ritorna all'indice

• ESAME 2008 PNI Suppletiva

1) Siano dati un cerchio di raggio r ed una corda AB uguale al lato del quadrato in esso iscritto.

1. Detto P un generico punto della circonferenza, giacente sull'arco maggiore di estremi A e B, si consideri il rapporto:
$$\frac{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2}{\overline{AB}^2}$$
e lo si esprima in funzione di $x = \operatorname{tg} P\widehat{A}B$.
2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Detto C il punto d'intersezione della curva γ con il suo asintoto orizzontale, si scriva l'equazione della tangente a γ in C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ, la suddetta tangente e la retta di equazione $x = k$, essendo k l'ascissa del punto di massimo relativo.

2) Si consideri la funzione: $y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c$.

1. Si determinino a, b, c, in modo che il suo grafico γ passi per $A(0, 2)$, per $B(\frac{\pi}{6}, 0)$ ed abbia in B tangente parallela alla retta $3\sqrt{3}x + 2y - 5 = 0$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
3. Si calcoli il valore dell'area di ciascuna delle due parti di piano compresa fra la retta $y = 2$ e la curva stessa.
4. Tra tutte le primitive della funzione data, si determini quella il cui grafico passa per $P(0, 6)$ e si scriva l'equazione della retta ad esso tangente in detto punto.

<u>Questionario</u>

1) Si determinino le costanti a e b in modo che la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{per } x \leqslant 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$
risulti continua e derivabile nel punto $x = 0$.

2) Un meteorite cade sulla Terra; qual è la probabilità che il punto d'incontro si trovi fra l'equatore e il tropico del Cancro (latitudine $\lambda = 23° \, 27'$ nord)?

3) Si determini il numero reale positivo λ in modo che la curva rappresentativa della funzione $g(x) = e^{-\lambda x}$ divida in parti equiestese la regione delimitata dalla curva rappresentativa della funzione $f(x) = e^{\lambda x}$, dall'asse x e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

4) Si determini la probabilità che, lanciando 8 volte una moneta non truccata si ottenga 4 volte testa.

5) Si dimostri che l'equazione $(3 - x)e^x - 3 = 0$ per $x > 0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

6) Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

7) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \arccos \sqrt{1 - x^2}$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

8) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani sono assegnati i punti $A(0, 1)$, $B(0, 4)$. Si determini sul semiasse positivo delle ascisse un punto C dal quale il segmento AB è visto con un angolo di massima ampiezza.

9) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_1^{\sqrt{\log x}} \frac{e^t}{t} dt$$

nel punto P di ascissa $x = e$.

10) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{6} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

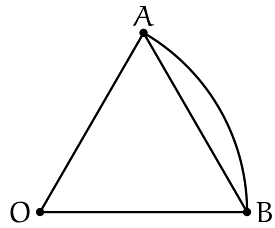
si calcoli un'approssimazione di π, utilizzando uno dei metodi d'integrazione numerica studiati.

Ritorna all'indice

• ESAME 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).



1. Si provi che l'area $\mathcal{S}$ compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $\mathcal{S}(x) = \frac{1}{2}r^2(x - \operatorname{sen} x)$ con $x \in [0, 2\pi]$.
2. Si studi come varia $\mathcal{S}(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a $100\ \mathrm{m}^2$. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

2) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*).

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

Questionario

1) Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto $(0, 2)$.

2) Sono dati gli insiemi $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{a,\ b,\ c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?

3) Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

4) *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5) Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{1}{0}; \quad 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

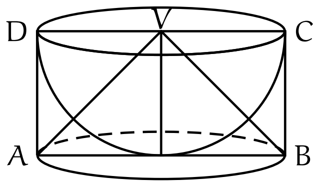
6) Si calcoli: $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

7) Si dimostri l'identità $\displaystyle\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8) Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra -1 e 0.



9) Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10) Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Ritorna all'indice

• ESAME 2009 Suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) I due segmenti adiacenti OA, AB sono uguali ed hanno una lunghezza data a. Nel medesimo semipiano rispetto alla retta OB si descrivano due semicirconferenze di diametri rispettivi OA ed OB, e per il punto O si conduca la semiretta tangente comune, sulla quale si prenda il segmento $OC = a$. Con origine O, si conduca una semiretta, che forma con OB un angolo α e interseca in P e Q le semicirconferenze.

1. Si calcoli il rapporto:
$$\frac{\overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2}{2a^2} \tag{1}$$
e lo si esprima in funzione di $x = \operatorname{tg}\alpha$, controllando che risulta:
$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1}.$$
2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico y.
3. Si dica per quale valore di α si hanno rispettivamente il massimo e minimo del rapporto (1).
4. Si determini l'area della superficie piana, finita, delimitata dall'asse delle ordinate, dalla curva γ e dal suo asintoto.

2) Sia data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x(2 - \ln x), & \text{per } x > 0, \\ 0, & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

1. Questa funzione è continua nel punto di ascissa 0? È derivabile in tale punto?
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
3. Si calcoli l'espressione, in funzione di t $(t > 0)$, dell'integrale
$$\mathcal{I}(t) = \int_t^{e^2} x(2 - \ln x)\, dx.$$
4. Si faccia vedere che $\mathcal{I}(t)$ tende verso un limite finito quando t tende a 0. Cosa rappresenta questo limite nel grafico precedente?

Questionario

1) Una piramide, avente area di base B e altezza h, viene secata con un piano parallelo alla base. Si calcoli a quale distanza dal vertice si deve condurre tale piano, affinché il prisma che ha per basi la sezione di cui sopra e la sua proiezione ortogonale sul piano di base della piramide abbia volume massimo.

2) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{\ln^2 x + x - 1}{x^2 - x + \operatorname{sen}^2(x-1)}$ quando x tende a 1.

3) Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, dall'asse x e dalle rette $x = 1$, $x = \sqrt{3}$.

4) Dato un triangolo rettangolo inscritto in un semicerchio, se sui suoi cateti presi come diametri ed esternamente si costruiscono due semicerchi, da questi e dal dato semicerchio

sono determinati due menischi, detti lunule d'Ippocrate. Si dimostri che la loro somma ha la stessa area del triangolo.

5) Si determini il luogo γ dei punti di intersezione delle due rette di equazioni:

$$\lambda x - y - (\lambda + 2) = 0,$$
$$(1 - \lambda)x + y + 2 = 0,$$

descritto al variare di λ, parametro reale qualunque. Si disegni la curva γ.

6) Sono dati un angolo α di π^2 radianti e un angolo β di 539 gradi. Si verifichi che sono entrambi maggiori di un angolo giro e minori di due angoli giro. Si dica quale dei due è il maggiore. Si dica inoltre se è più grande il seno di α o il seno di β.

7) Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto B partendo dal punto A e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto B, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre una velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

8) Data la parabola $x = -ay^2 + 3y$ (con $a > 0$), si determini per quale valore di a l'area della parte finita di piano compresa tra il suo grafico e l'asse y è uguale a 72.

9) Si dimostri che un numero di quattro cifre tutte uguali è divisibile per 101.

10) Si enunci il teorema di Rolle e si mostri, con opportuni esempi, che se una qualsiasi delle tre condizioni previste non è soddisfatta, il teorema non è valido.

Ritorna all'indice

• ESAME 2009 PNI

1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^2}{n!}\right) e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in \mathbb{R}$.

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è $f'(x) = -\frac{x^2}{n!}e^{-x}$.
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leqslant 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)\,dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

2) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3 + kx$. con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia **D** la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g. Si calcoli l'area di **D**.
4. La regione **D** è la base di un solido **W** le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di **W**.

Questionario

1) Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che: $\int_{-b}^{b} |x - a|\,dx = a^2 + b^2$.

2) Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *funzioni* (o *applicazioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?

3) Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).

4) *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5) Si considerino le seguenti espressioni:

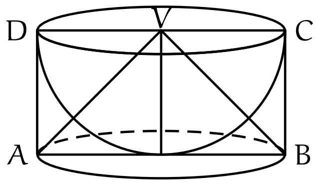
$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0.$$

a quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6) Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\operatorname{sen} x = 0$, con punto iniziale $x_0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

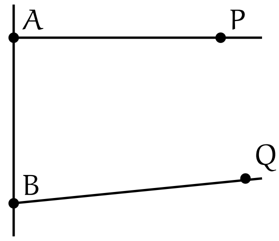
7) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8) Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?



9) Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

10) *"Se due punti* P *e* Q *del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta* AB *e gli angoli* $P\widehat{A}B$ *e* $Q\widehat{B}A$ *hanno somma minore di* $180°$*, allora le semirette* AP *e* BQ*, prolungate adeguatamente al di là dei punti* P *e* Q*, si devono intersecare"*. Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Ritorna all'indice

• ESAME 2009 PNI Suppletiva

1) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x^2+1}, & \text{per } x < 0 \\ 0, & \text{per } x = 0 \\ \operatorname{arctg} \operatorname{sen} x, & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

1. Si provi che essa è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.
2. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy). Per quel che riguarda le ascisse positive, ci si limiterà all'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, situata nel II quadrante, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = -1$.
4. Utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati, si calcoli un valore approssimato dell'area della superficie piana, delimitata dall'asse delle x e dall'arco di γ i cui estremi hanno ascisse 0 e π.

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = 2 + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

1. Si determinino le costanti a e b in modo che risulti:
$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx = \frac{10}{3} - 6\ln\frac{5}{3}.$$
2. Si studi la funzione così ottenuta e se ne tracci il grafico γ.
3. Si conduca la tangente a γ nel punto di ascissa $x = 0$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con i due asintoti.
4. La retta $y = k$ incontri γ in due punti di ascissa x_1 e x_2. Si esprimano, in funzione di k, la somma e il prodotto di tali ascisse. Si dimostri che la quantità
$$S = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1}$$
è indipendente dal valore di k e se ne calcoli il valore.

Questionario

1) Nel gioco del lotto, qual è la probabilità dell'estrazione di un numero assegnato? Quante estrazioni occorre effettuare perché si possa aspettare, con una probabilità $p = 1/2$ assegnata, di vederlo uscire almeno una volta?

2) Sul diametro MN di un cerchio, si considerino due punti P e Q, e su MP, MQ, NP, NQ come diametri si descrivano quattro semicerchi, i primi due posti in una stessa parte rispetto alla retta MN, gli altri due posti nell'altra parte. Si dimostri che il perimetro del quadrilatero curvilineo (*pelecoide*) così ottenuto ha la stessa lunghezza della circonferenza data.

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}} \frac{e^{t^2}}{|t|+1}\,dt$$

nel punto P di ascissa $x = \pi/2$.

4) Siano dati una sfera di raggio r, il cubo in essa inscritto e il cono circolare retto inscritto nel cubo. Si scelga a caso un punto all'interno della sfera: si determini la probabilità che tale punto risulti interno al cono.

5) Nell'omotetia di centro $O(0,0)$ e rapporto $k = -4$, si determini l'equazione della circonferenza corrispondente alla $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$. Si confrontino fra loro i centri e i raggi delle due circonferenze.

6) Dati due punti A e B distanti tra loro 5 cm, si dica qual è il luogo dei punti C dello spazio tali che il triangolo ABC sia rettangolo in A ed abbia area uguale a 1 cm^2.

7) Si discuta il seguente sistema lineare omogeneo in relazione al parametro reale λ e si determinino in ogni caso le eventuali soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ (\lambda - 1)x + \lambda y + 4z = 0 \\ \lambda x + 5y + (2\lambda + 1)z = 0. \end{cases}$$

8) Le lunghezze dei lati di un triangolo sono numeri interi consecutivi e l'angolo di maggior ampiezza è il doppio di quello di ampiezza minore. Si calcolino la lunghezza del lato minore e il coseno dell'angolo minore.

9) Si consideri un cerchio di centro O e raggio r e sia A un punto della circonferenza. Sia inoltre OB un raggio mobile che forma l'angolo $2x$ con OA. Facendo ruotare la figura attorno ad OA, il segmento AB genera la superficie laterale di un cono. Come deve essere scelta in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo perché quest'area sia massima?

10) Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 10,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

Ritorna all'indice

• ESAME 2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in \mathbb{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0,1)$? E nel punto $S(1,0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

2) Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ $(b > 0,\ b \neq 1)$.

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b. La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

<u>Questionario</u>

1) Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2) Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3) Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

4) Si calcoli: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

5) Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

6) Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

7) Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leqslant 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8) Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9) Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\widehat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\widehat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10) Si consideri la regione limitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Ritorna all'indice

• ESAME 2010 Suppletiva

1) Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C, tali che $AB = BC$.

1. Si calcoli, in funzione dell'angolo $A\widehat{O}B = x$, la quantità:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2$$

controllando che risulti:

$$f(x) = -4\cos^2 x - 4\cos x + 8.$$

2. Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
3. Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x)$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

2) Sia data la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.

1. Si determini il dominio di $f(x)$ e si dica se la funzione è continua e derivabile in ogni punto di esso.
2. Si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcoli l'area della parte di piano R racchiusa dal grafico γ e dal semiasse positivo delle ascisse.
4. La regione R genera, nella rotazione attorno all'asse delle ascisse, un solido S. In S si inscriva un cono circolare retto con vertice nell'origine. Si determinino raggio e altezza del cono, affinché il suo volume sia massimo.

Questionario

1) In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2) Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

3) Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4) Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leqslant x \leqslant 2$.

6) Si determinino a e b in modo tale che il grafico della funzione $y = a^{x+b}$ passi per i punti del piano xy di coordinate $(1, 4)$ e $(3, 8)$.

7) Un tetraedro ed un ottaedro regolari hanno gli spigoli della stessa lunghezza l. Si dimostri che il volume dell'ottaedro è il quadruplo di quello del tetraedro.

8) Si trovi l'equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x = 2t$ e $y = \dfrac{2}{t^2+1}$ nel suo punto di coordinate $(2, 1)$.

9) Si dimostri che se una funzione $f(x)$ è derivabile nel punto x_0, ivi è anche continua; si porti un esempio di funzione continua in un punto e ivi non derivabile.

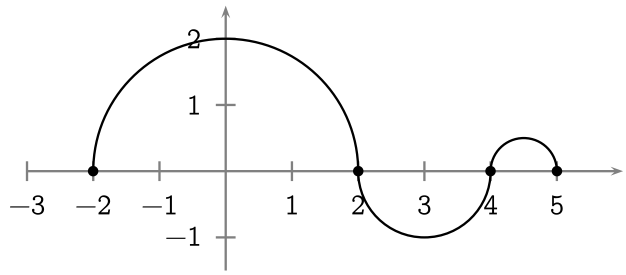
10) Si dimostri che la differenza dei quadrati di due lati di un triangolo è uguale alla differenza dei quadrati delle rispettive proiezioni dei lati stessi sul terzo lato del triangolo.

Ritorna all'indice

• ESAME 2010 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leqslant x \leqslant 5$ essendo g la derivata di una funzione f. Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0,0)$, $(3,0)$, $\left(\frac{9}{2},0\right)$ e raggi rispettivi 2, 1, $\frac{1}{2}$.



a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?
b) Per quali valori di x, $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
c) Se $f(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} g(t)\,dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.
d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

2) Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.
a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O.
b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.
c) Sia **B** la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A. Si determini la retta r, parallela all'asse x, che stacca su **D** il segmento di lunghezza massima.
d) Si consideri il solido **W** ottenuto dalla rotazione di **D** intorno all'asse x. Se si taglia **W** con piani ortogonali all'asse x, quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di **W**.

Questionario

1) Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2) Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3) Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

4) Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$. Come si può essere certi che esiste un unico zero?

5) Sia G il grafico di una funzione $x \to f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.

6) Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t)$ al variare di t, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

7) Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.

8) Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

9) Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\widehat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\widehat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10) Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$. L'integrale $\int_0^4 2\pi x \left(\sqrt{x}\right) dx$ fornisce il volume del solido:

a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x;
b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y;
c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio $\sqrt{x}$;
d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2010 PNI Suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) È data una circonferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$. Sul prolungamento del diametro AB, dalla parte di B, si prenda un punto P e da esso si conduca una tangente alla circonferenza.

1. Detti T il punto di tangenza e Q il punto di intersezione di questa tangente con la tangente in A alla circonferenza, si calcoli il rapporto:

$$\frac{\overline{TQ}^2 + \overline{TP}^2}{\overline{AP}^2},$$

espresso in funzione di $x = \overline{BP}$, controllando che risulta:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x}.$$

2. Prescindendo dalla questione geometrica, si studi la funzione $f(x)$ e se ne tracci il grafico γ.
3. Si calcolino i numeri a, b, c in modo che risulti:

$$\frac{x^2+1}{x^2+2x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+2}. \tag{1}$$

4. Tenendo presente la scomposizione (1), si calcoli l'area della regione piana, limitata da γ, dal suo asintoto orizzontale e dalla retta d'equazione $x = 2$.

2) In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, si denoti con Γ_a il grafico della funzione

$$f_a(x) = (x-a)e^{2-\frac{x}{a}}$$

dove a è un parametro reale positivo ed e è il numero di *Nepero*.

1. Si dimostri che, al variare di a, le curve Γ_a tagliano l'asse delle x secondo lo stesso angolo α. Si determini l'ampiezza di α in gradi e primi sessagesimali.
2. Si dimostri che la tangente a Γ_a nel punto di flesso, descrive, al variare di a, un fascio di rette parallele. Si determini l'equazione di tale fascio.
3. Posto $a = 1$, si studi $f_1(x)$ e si tracci Γ_1.
4. Si calcoli l'area $S(k)$ della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ_1, dall'asse x e dalla retta $x = k$, con $k > 1$. Cosa si può dire di $S(k)$ quando $k \to +\infty$?

Questionario

1) In cima ad una roccia a picco sulla riva di un fiume è stata costruita una torretta d'osservazione alta 11 metri. Le ampiezze degli angoli di depressione per un punto situato sulla riva opposta del fiume, misurate rispettivamente dalla base e dalla sommità della torretta, sono pari a 18° e 24°. Si determini la larghezza del fiume in quel punto.

2) Considerata la funzione $f(x) = \dfrac{3^{3x} - a^x}{6^x - 5^x}$, dove a è una costante reale positiva, si determini tale costante, sapendo che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$.

3) Su un piano orizzontale α si pongono un cono circolare retto, il cui raggio di base è r e l'altezza $2r$, e una sfera di raggio r. A quale distanza x dal piano α bisogna segare

questi due solidi con un piano orizzontale β, perché la somma delle aree delle sezioni così ottenute sia massima?

4) Si dimostri che per gli zeri x_1 e x_2 di una funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale la relazione $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$ e si dia una interpretazione geometrica della affermazione dimostrata.

5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, nell'intervallo $1 \leqslant x \leqslant 2$.

6) Si determini il punto della parabola $4y = x^2$ più vicino al punto di coordinate $(6, -3)$.

7) Si consideri l'equazione

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0.$$

Si dimostri che essa ammette una soluzione reale x_0 tale che $1 < x_0 < 2$. Avvalendosi di un qualsiasi procedimento iterativo si determini x_0 a meno di $1/100$.

8) Nel piano cartesiano Oxy è dato il cerchio C con centro nell'origine e raggio $r = 3$; siano $P(0, 3)$ e $Q(2, \sqrt{5})$ punti di C. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x del quadrilatero mistilineo $PORQ$ (con R proiezione di Q sull'asse x).

9) Siano dati un ottaedro regolare di spigolo l e la sfera in esso inscritta; si scelga a caso un punto all'interno dell'ottaedro. Si determini la probabilità che tale punto risulti interno alla sfera.

10) Un'urna contiene 20 palline, che possono essere rosse o azzurre. Quante sono quelle azzurre, se, estraendo 2 palline senza riporre la prima estratta, la probabilità di estrarre almeno una pallina azzurra è $27/38$.

Ritorna all'indice

• ESAME 2011

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{sen} \pi x.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

2) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b)e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su $\mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy.
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ, dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su $\mathbb{R}^+$ se per ciascun x_i oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leqslant 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.

Questionario

1) Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

2) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

3) Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

4) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

5) Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ *radianti*.

6) Si calcoli

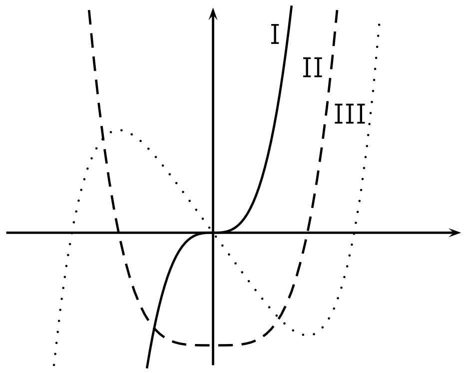
$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}.$$

7) Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0.

8) In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?

9) Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10) Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2011 Suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

1) Data una semicirconferenza di diametro $AB = 2$, si prenda su di essa un punto P e sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

1. Si esprima la somma $AP + PM$ in funzione di $x = P\widehat{A}B$.
2. Si studi la funzione $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, mettendo in evidenza poi la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si dimostri che γ è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
4. Si calcoli l'area della regione piana, limitata dalla curva γ, dagli assi cartesiani e dalla retta di equazione $x = \frac{\pi}{3}$.

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scrivano l'equazione della tangente a γ nel punto di flesso e quella della retta ad essa parallela, passante per il punto di γ avente ascissa $\sqrt{3}$; si calcoli l'area del parallelogramma formato da queste due rette, dall'asse x e dall'asintoto orizzontale destro.
3. Si calcoli l'area della regione A_k, delimitata dalla curva γ, dall'asse y, dall'asintoto orizzontale destro e dalla retta $x = k$ con $k > 0$. Si calcoli poi il limite di A_k quando $k \to +\infty$.
4. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano limitata dalla curva γ, dalla tangente inflessionale e dalla retta $x = 1$.

Questionario

1) Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di $30°$. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a $20°$, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2) La funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\left(e^{1/x} - 1\right)^2}$$

non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

3) La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di $180°$ intorno all'asse della parabola.

4) Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che succederebbe se l'esponente fosse $\operatorname{sen} x$?

5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6) Si dica se l'equazione:

$$2 \operatorname{sen} x + 2 \cos x = 3 + 2^x$$

ha soluzione.

7) Si domanda quale rapporto bisogna stabilire tra lo spigolo dell'ottaedro regolare e lo spigolo del cubo affinché i due solidi abbiano volumi uguali.

8) Si dimostri che la seguente proposizione è vera: "Se il grafico di una funzione razionale intera $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, allora il grafico della sua derivata $f'(x)$ è simmetrico rispetto all'origine".

9) Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{e^{x^3} - 1}{x \operatorname{sen}^2 x}$ quando x tende a 0.

10) Data una circonferenza di centro O, si conducano negli estremi A e B di un suo diametro AB le tangenti e siano C e D i punti d'intersezione di esse con una terza tangente alla circonferenza.
Si dimostri che l'angolo $C\widehat{O}D$ è retto.

Ritorna all'indice

• ESAME 2011 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Sia f la funzione definita sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali da $f(x) = x + \ln 4 + \dfrac{2}{e^x + 1}$ e sia Γ la sua rappresentazione grafica nel sistema di riferimento Oxy.

1. Si determini il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$. Si calcoli $f(x) + f(-x)$ e si spieghi perché dal risultato si può dedurre che il punto $A(0; 1 + \ln 4)$ è centro di simmetria di Γ.
2. Si provi che, per tutti i reali m, l'equazione $f(x) = m$ ammette una e una sola soluzione in $\mathbb{R}$. Sia α la soluzione dell'equazione $f(x) = 3$; per quale valore di m il numero $-\alpha$ è soluzione dell'equazione $f(x) = m$?
3. Si provi che, per tutti gli x reali, è: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$. Si provi altresì che la retta r di equazione $y = x + \ln 4$ e la retta s di equazione $y = x + 2 + \ln 4$ sono asintoti di Γ e che Γ è interamente compresa nella striscia piana delimitata da r e da s.
4. Posto $I(\beta) = \displaystyle\int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]\, dx$, si calcoli: $\lim_{\beta \to +\infty} I(\beta)$. Qual è il significato geometrico del risultato ottenuto?

2) Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x.$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie d'acqua. Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

Questionario

1) Silvia, che ha frequentato un indirizzo sperimentale di liceo scientifico, sta dicendo ad una sua amica che la *geometria euclidea* non è più vera perché per descrivere la realtà del mondo che ci circonda occorrono modelli di *geometria non euclidea*. Silvia ha ragione? Si motivi la risposta.

2) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

3) Sia R la regione delimitata, per $x \in [0, \pi]$, dalla curva $y = \operatorname{sen} x$ e dall'asse x e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y. Si calcoli il volume di W.

4) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n.

5) In una delle sue opere G. Galilei fa porre da Salviati, uno dei personaggi, la seguente questione riguardante l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ("i numeri tutti"). Dice Salviati: ≪. . . se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?≫. Come si può rispondere all'interrogativo posto e con quali argomentazioni?

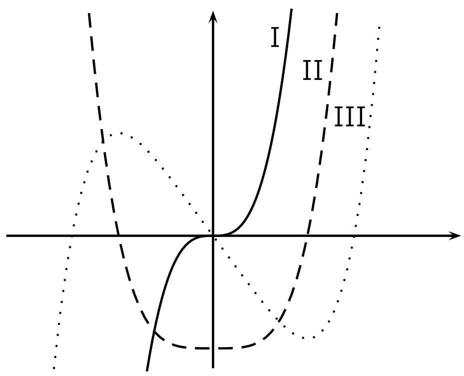
6) Di tutti i coni inscritti in una sfera di raggio 10 cm, qual è quello di superficie laterale massima?

7) Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette?

8) In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è citato così spesso?

9) Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

10) Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f, un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f''.
Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?



	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II

Si motivi la risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2011 PNI Suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

1) È dato un quadrato $ABCD$ di lato $AB = a$. Da A si conduca una semiretta, che incontra il lato BC in E e il prolungamento del lato DC in F.

1. Si calcoli il rapporto:
$$\frac{BE + DF}{AB},$$
espresso in funzione di $x = B\widehat{A}E$, controllando che risulta.
$$f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x.$$
2. Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ e dalla retta di equazione $y = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nell'intervallo $\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$ è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.

2) Si consideri la funzione:
$$f(x) = (3 - x)\sqrt{x + 3}.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si scriva l'equazione della tangente t alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli l'area del triangolo che essa forma con gli assi cartesiani.
3. Si calcoli il volume del cono S generato da una rotazione completa attorno all'asse x del succitato triangolo e il volume del solido S' generato dalla rotazione attorno all'asse x della porzione di piano, situata nel I quadrante, limitata dalla curva γ e dagli assi cartesiani.
4. Si scelga a caso un punto all'interno del cono S. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno al solido S'.

Questionario

1) Si sa che certi uccelli, durante la migrazione, volano ad un'altezza media di 260 metri. Un'ornitologa osserva uno stormo di questi volatili, mentre si allontana da lei in linea retta, con un angolo di elevazione di 30°. Se un minuto più tardi tale angolo si è ridotto a 20°, con che velocità si stanno spostando gli uccelli?

2) La funzione:
$$f(x) = \frac{1}{\left(e^{1/x} - 1\right)^2}$$
non è definita nel punto $x = 0$, che è per essa un punto di discontinuità. Si precisi il tipo di questa discontinuità, dopo aver esaminato il limite della $f(x)$ per x tendente a zero da sinistra e per x tendente a zero da destra.

3) La retta di equazione $x = 8$ seca la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$ nei punti A e B. Fra i rettangoli inscritti nel segmento parabolico di base AB si determini quello che genera il cilindro di volume massimo in una rotazione di 180° intorno all'asse della parabola.

4) Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$f(x) = (3\cos x + \operatorname{sen}^2 x - 3)^{\cos x}$$

Che succederebbe se l'esponente fosse $\operatorname{sen} x$?

5) Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = e^x(x^2 + x + 1)$, nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 1$.

6) Si determini un numero positivo N tale che, per $x > N$, la funzione $f(x) = 2^{0,3x}$ è sempre maggiore della funzione $g(x) = x^{30}$.

7) Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx,$$

si calcoli un'approssimazione di $\frac{\pi}{2}$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8) La regione del I quadrante delimitata dall'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dagli assi cartesiani è la base di un solido F le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse y sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di F.

9) Un bersaglio è costituito da tre cerchi concentrici, i cui raggi misurano rispettivamente 5, 3 e 1. Un arciere ha probabilità $\frac{1}{2}$ di colpire il bersaglio. Qual è la probabilità che lo colpisca in un punto appartenente al cerchio di raggio 3 ma non a quello di raggio 1?

10) Sia P un punto fissato su una circonferenza; quale è la probabilità che prendendo su questa due punti a caso A e B, l'angolo $A\widehat{P}B$ sia acuto? Si illustri il ragionamento seguito.

Ritorna all'indice

• ESAME 2012

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

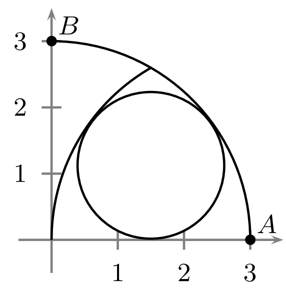
1) Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

$$f(x) = |27x^3| \qquad \text{e} \qquad g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy.
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.

2) Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi $A(3,0)$ e $B(0,3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9-6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0, \frac{3}{2})$.

1. Sia r la retta tangente in A a L. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB.
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, hanno, per ogni $0 \leqslant x \leqslant 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x.
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.



Questionario

1) Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

2) Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

3) La posizione di una particella è data da $s(t) = 20(2e^{-t/2} + t - 2)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

4) Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

5) Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto

che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6) Sia $f(x) = 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

7) È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.

8) Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

9) Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10) Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

A) $\cos(\operatorname{sen}(x^2 + 1))$ B) $\operatorname{sen}(\cos(x^2 + 1))$ C) $\operatorname{sen}(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$

Si giustifichi la risposta.

Ritorna all'indice

• ESAME 2012 Suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, il volume del solido generato dal trapezio in una rotazione di $180°$ intorno alla congiungente dei punti medi delle basi, controllando che risulta:

$$\mathcal{V}(x) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\cos^2 x - 3\cos x + 3}{\operatorname{sen}^2 x}$$

2. Si studi la funzione $f(x) = 3\mathcal{V}(x)/\pi$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$, mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scriva l'equazione della tangente a γ nel punto di ascissa $x = \pi/2$ e si calcoli l'area del triangolo che essa determina con l'asse x e con la retta di equazione $x = \pi$.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = \pi/4$ e $x = \pi/2$.

2) Si consideri la funzione:

$$f(x) = x\sqrt{2-x}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si risolva la disequazione:

$$x\sqrt{2-x} < 1$$

3. Si scriva l'equazione della tangente alla curva γ nel punto di intersezione con l'asse y e si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza dell'angolo ϕ che essa forma con la direzione positiva dell'asse x.
4. La regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dall'asse x nel I quadrante è la base di un solido S, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.

Questionario

1) Si divida il segmento $AB = a$ in due parti AC e CB, in modo che, costruito su AC il quadrato $ACDE$ e su CB il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagono $ABFDE$.

2) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \log(\operatorname{sen} 2x), & \text{per } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{per } x = 0, \end{cases}$$

si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:

$$f(x) = (x+2)^{\log(e+2x)}$$

nel punto $P(0, 2)$.

4) La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + \operatorname{tg} x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

5) Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di $4°$; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura $9°$. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6) Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x.$$

7) Un ottaedro regolare di alluminio (densità $\rho = 2{,}7$ g/cm^3), avente lo spigolo $l = 5$ cm, presenta all'interno una cavità di forma cubica. Sapendo che la massa dell'ottaedro è $m = 155$ g, si calcoli la lunghezza dello spigolo della cavità.

8) Quante diagonali ha un poligono convesso di n lati?

9) Si calcoli il valore medio della funzione:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

nell'intervallo $a \leqslant x \leqslant b$, con $0 < a < b$, e si dimostri che esso è uguale alla media geometrica tra i due valori che la funzione assume nei due estremi dell'intervallo.

10) Data la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 4}{x - 1}$$

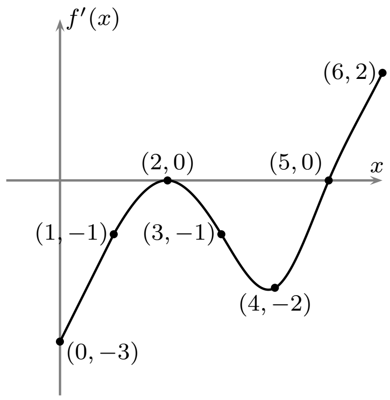
si verifichi che esiste un solo punto ξ interno all'intervallo chiuso $[-1, 0]$, tale che la tangente al diagramma in questo punto è parallela alla corda congiungente i due punti estremi del diagramma.

Ritorna all'indice

• ESAME 2012 PNI

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Della funzione f, definita per $0 \leqslant x \leqslant 6$, si sa che è dotata di derivata prima e seconda e che il grafico della sua derivata $f'(x)$, disegnato a lato, presenta due tangenti orizzontali per $x = 2$ e $x = 4$. Si sa anche che $f(0) = 9$, $f(3) = 6$ e $f(5) = 3$.



1. Si trovino le ascisse dei punti di flesso di f motivando le risposte in modo esauriente.
2. Per quale valore di x la funzione f presenta il suo minimo assoluto? Sapendo che $\int_0^6 f'(t)dt = -5$ per quale valore di x la funzione f presenta il suo massimo assoluto?
3. Sulla base delle informazioni note, quale andamento potrebbe avere il grafico di f?
4. Sia g la funzione definita da $g(x) = xf(x)$. Si trovino le equazioni delle rette tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa $x = 3$ e si determini la misura, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto che esse formano.

2) Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un riferimento cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e di g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

Questionario

1) Si calcoli

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2^{3x} - 3^{4x}}{x^2}.$$

2) Una moneta da 1 euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle esagonali (regolari) di lato 10 cm. Qual è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella (cioè non tagli i lati degli esagoni)?

3) Sia $f(x) = 3^x$. Per quale valore di x, approssimato a meno di 10^{-3}, la pendenza della retta tangente alla curva nel punto $(x, f(x))$ è uguale a 1?

4) L'insieme dei numeri naturali e l'insieme dei numeri razionali sono insiemi equipotenti? Si giustifichi la risposta.

5) Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6) Si dimostri che la curva di equazione $y = x^3 + ax + b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

7) È dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h.

8) Un'azienda industriale possiede tre stabilimenti (A, B e C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi, e di questi il 10% sono difettosi. Nello stabilimento B si produce un terzo dei pezzi, e il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si producono i pezzi rimanenti, e il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, con quale probabilità esso proviene dallo stabilimento A?

9) Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r, nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10) Si provi che fra tutti i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio r, quello di minima area laterale ha il vertice che dista $r\sqrt{2}$ dalla superficie sferica.

Ritorna all'indice

• ESAME 2012 PNI Suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

1) Un trapezio isoscele è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio 1, in modo che la base maggiore contenga il diametro.

1. Si calcoli, in funzione dell'ampiezza x del suo angolo acuto, l'area della superficie del trapezio, controllando che risulta:
$$S(x) = \frac{2 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$$
2. Si studi la funzione $S(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 < x < 2\pi$ mettendo in evidenza la parte di grafico compatibile con i dati del problema.
3. Si scelga a caso un punto all'interno del trapezio e si determini la probabilità $p(x)$ che tale punto risulti interno al semicerchio inscritto. Si studi la funzione $p(x)$ e si tracci il suo grafico ω nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.
4. Si calcoli il valore medio della funzione $p(x)$ nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

2) Si consideri la funzione:
$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1 + x^2}$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico γ, su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy.
2. Si verifichi che i tre punti di flesso di γ sono allineati e si scriva l'equazione della retta alla quale essi appartengono.
3. Si scrivano le equazioni delle tangenti inflessionali, si dimostri che due di esse sono parallele e si calcoli la loro distanza.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva γ, dall'asse x e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = \sqrt{3}$.

<u>Questionario</u>

1) Si divida il segmento $AB = a$ in due parti AC e CB, in modo che, costruito su AC il quadrato $ACDE$ e su CB il triangolo equilatero CBF, sia minima l'area del pentagono $ABFDE$.

2) Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \log(\operatorname{sen} 2x), & \text{per } 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \text{per } x = 0, \end{cases}$$
si provi che è continua, ma non derivabile, nel punto $x = 0$.

3) Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = (x + 2)^{\log(e+2x)}$$
nel punto $P(0, 2)$.

4) La superficie piana S, delimitata dalla curva γ di equazione $y = 1 + \operatorname{tg} x$ e dall'asse x nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$, è la base di un solido Σ, le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di Σ.

5) Mentre corre con una velocità costante attraverso il deserto, montando il suo fido cammello, un capo tuareg vede la cima di una grande palma e dirige direttamente verso di

essa. Al primo avvistamento la cima della palma si presentava con un angolo di elevazione di $4°$; venti minuti più tardi l'angolo di elevazione misura $9°$. Quanti minuti sono ancora necessari al tuareg per raggiungere l'albero?

6) Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = \dfrac{ax^2+4}{bx+2}$ perché la curva rappresentativa ammetta asintoto di equazione $y = x + 2$.

7) Tenuto conto che:

$$\log 2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}\, dx$$

si calcoli un'approssimazione di $\log 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

8) Sia C la curva d'equazione $y = x^2 - 2x + 4$, e sia G la curva simmetrica di C rispetto all'asse y. Qual è l'equazione di G?

9) Si determini la probabilità che nel lancio di due dadi si presenti come somma un numero dispari. Lanciando 5 volte due dadi, qual è la probabilità di ottenere come somma un numero dispari almeno due volte?

10) Si scelga a caso un punto all'interno di un parallelogramma, avente i lati lunghi rispettivamente 8 m e 6 m e gli angoli acuti di $30°$. Si determini la probabilità che la sua distanza da ogni vertice sia maggiore di 2 m.

Ritorna all'indice